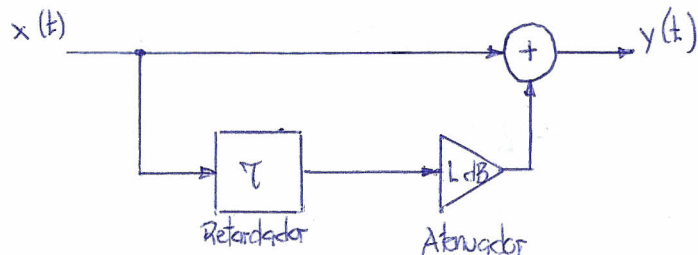


PROBLEMAS DE EXAMENES TC

P.1 Enero 2014 (Temas 2 y 3)

Un grupo de alumnos han simulado un sistema de transmisión multicamino. Este se caracteriza porque el transceptor recibe la señal transmitida por dos ó mas trayectos diferentes, lo que significa que la señal transmitida sufre distintos retardos y atenuaciones:



a) Considerando que el retardo es $T = 2s$ y el atenuador proporciona (a la salida se ha realizado una edición de la potencia de entrada) de $L = 3dB$, determine la respuesta al impulso ($h(t)$) y la respuesta en frecuencia del canal ($H(f)$)

⇒ Respuesta impulsiva $h(t)$:

• Si consideramos $x(t) = \delta(t)$:

$$y(t) = \delta(t) + \frac{1}{\sqrt{L}} \delta(t-T) \equiv h(t)$$

• Sustituyendo $T = 2s$ y $L = 3dB \rightarrow$

$$L = 10^{3/10} = 10^{0.3} \approx 2 \quad (\text{La potencia se reduce a la mitad})$$

$$h(t) = \delta(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \delta(t-2)$$

~~$\frac{1}{\sqrt{L}}$, L en dB (Potencia) : hay que extrapolar la potencia de $\delta(t)$~~

~~$\frac{1}{\sqrt{L}}$: hay que hacer la operación inversa al cálculo de la potencia en W~~

~~1) Obtenemos la razón lineal de (Potencia / Recibida) : L (W)~~

~~2) $P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \rightarrow 1$~~

⇒ Respuesta en frecuencia $H(f)$:

• Para ello hacemos uso de la T.F:

$$h(t) = \delta(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \delta(t-2) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(f) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j4\pi f}$$

(1) Respuesta del atenuador de potencia:

• $\frac{1}{\sqrt{L}}$: es una división porque reduce la potencia, si fuese amplificador sería $\sqrt{L}$

• L : es la razón lineal $\rightarrow A(dB) = 10 \log_{10}(L) \rightarrow L = 10^{A(dB)/10}$ (¿En cuántos vd. lineales aumenta o disminuye la P_x ?)

• $\sqrt{L}$: es raíz porque la potencia trabaja con valores al cuadrado. $P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$
luego para que se produzca una reducción lineal de $1/2$ de la Potencia en W es necesario que la amplitud de la ~~edición~~ ^{señal} lineal sea $1/\sqrt{L}$

b) Determine la P_{xca} , P_{xcc} y la $G_x(f)$ de la señal que puede ser modelada mediante un P.E. estacionario en sentido estricto cuya función de autocorrelación vale

$$R_x(\tau) = 14 \cdot (e^{-3|\tau|} + 2)$$

→ P_{xca} y P_{xcc}

• Para una señal $x(t)$ que pertenece a un P.E. ergó estacionario en sentido estricto, la descripción de la que contamos es su función de autocorrelación, $R_x(\tau)$.

• $\tau \Rightarrow 0 \quad R_x(0) = P_x$

$$R_x(0) = 14 \cdot (e^{-3|0|} + 2) = 42 \text{ W}$$

• $\tau \rightarrow \infty \quad \boxed{P_{xcc}} \equiv \lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = 14 \cdot (e^{-3|\tau|} + 2) = \boxed{28 \text{ W}}$

Por tanto, la P_{xca} de la señal $x(t)$ será:

$$P_x = P_{xca} + P_{xcc} \rightarrow P_{xca} = P_x - P_{xcc} = 42 - 28 = \boxed{14 \text{ W}}$$

→ $G_x(f)$

• Para su cálculo, por el teorema de Wiener - Khinchine, tenemos que:

$$R_x(\tau) \xrightarrow{\mathcal{F}} G_x(f)$$

$$R_x(\tau) = 14 \cdot (e^{-3|\tau|} + 2) \xrightarrow{\mathcal{F}} G_x(f) = 14 \cdot \left[\frac{6}{9 + (2\pi f)^2} + 2\delta(f) \right]$$

$$\boxed{G_x(f) = 14 \cdot \frac{6}{9 + 4\pi^2 f^2} + 28\delta(f)}$$

c) Si la señal $x(t)$ del apartado b) se transmite a través del sistema ~~multicanal~~ multicamino determine $G_y(f)$ a la salida del sistema. Expresar en su forma más simplificada.

$$y(t) = x(t) * h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * R_h(\tau) \xrightarrow{\text{W.K.}} G_y(f) = G_x(f) \cdot G_h(f)$$

$$R_x(\tau) = x(\tau) * x^*(\tau - \tau) \xrightarrow{\mathcal{F} \text{ W.K.}} G_x(f) = X(f) \cdot X^*(f) = |X(f)|^2$$

$$R_h(\tau) = h(\tau) * h^*(\tau - \tau) \xrightarrow{\mathcal{F} \text{ W.K.}} G_h(f) = H(f) \cdot H^*(f) = |H(f)|^2$$

⇒ Calculamos $G_h(f)$:

$$\begin{aligned}
 G_h(f) &= H(f) \cdot H^*(f) = |H(f)|^2 \\
 &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j4\pi f}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j4\pi f}\right) \\
 &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j4\pi f} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j4\pi f} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j4\pi f} \cdot e^{j4\pi f} \\
 &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{j4\pi f} + e^{-j4\pi f}) + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{3}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{e^{j4\pi f} + e^{-j4\pi f}}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$G_h(f) = \frac{3}{2} + \sqrt{2} \cos(4\pi f)$$

⇒ Ahora calculamos $G_y(f)$:

$$\begin{aligned}
 G_y(f) &= G_x(f) \cdot G_h(f) \\
 &= \left[\frac{84}{9 + (2\pi f)^2} + 28\delta(f) \right] \cdot \left[\frac{3}{2} + \sqrt{2} \cos(4\pi f) \right] \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \frac{84}{9 + (2\pi f)^2} + \frac{84}{9 + (2\pi f)^2} \cdot \frac{3}{2} + \sqrt{2} \cos(4\pi f) + 28\delta(f) \cdot \frac{3}{2} + \\
 &\quad + 28\delta(f) \cdot \sqrt{2} \cos(4\pi f) \\
 &= \frac{84 \cdot \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2} \cos(4\pi f) \right)}{9 + (2\pi f)^2} + 28\delta(f) \cdot \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2} \cos(4\pi f) \right)
 \end{aligned}$$

Importante!!: Función delta y funcional delta

⇒ Por lo que se ve siempre que se realiza una multiplicación con $\delta(f)$ se trata de una multiplicación con el funcional $\delta(t)$

• Función $\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t=0 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$

Por tanto;

• Funcional $\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$

⇒ si fuese τ estaríamos hablando de las propiedades de replicación ó desplazamiento

$$\begin{aligned}
 28\delta(f) \cdot \sqrt{2} \cos(4\pi f) &= 28 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) \cdot \sqrt{2} \cos(4\pi f) df \\
 &= 28\sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) \cdot \cos(4\pi f) df \\
 &= 28\sqrt{2} \cdot \cos(0)
 \end{aligned}$$

Así tenemos que:

$$G_y(f) = \frac{84 + (3/2 \cdot \sqrt{2} \cos(4\pi f))}{9 + (2\pi f)^2} + 28(3/2 + \sqrt{2}) \cdot \delta(f)$$

P. 1 Octubre de 2013 (Temas 2 y 3)

Julio 2013 (Parecido)

Junio 2013 (Parecido)

Un fenómeno físico se modela como un P.E ergódico con $R_x(\tau) = A \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\tau}{B}\right)$, $A, B > 0$. Para caracterizar dicho P.E los científicos definen una nueva medida de balanceo; $m_x(\tau)$

$$m_x(\tau) = E[(x(t+\tau) - x(t))^2]$$

a) Calcule la potencia de continua, de alterna y la potencia media del P.E

• Soltemos por la definición de función de autocorrelación:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau) \cdot x^*(t) dt$$

• Si $\tau \rightarrow 0$

$$R_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x^*(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = P_x$$

• Así:

$$P_x = R_x(0) = A \operatorname{sinc}^2\left(\frac{0}{B}\right) = \boxed{A \text{ W}} \quad (\text{Potencia media del proceso})$$

• Por otro lado tenemos que la $P_{x_{cc}} = G_x(0)$: Recuerda!! $\operatorname{sinc}^2(2Wt) = \frac{1}{2W} \Lambda\left(\frac{f}{2W}\right)$

$$R_x(\tau) \xrightarrow{\frac{W \cdot K}{f}} G_x(f)$$

$$R_x(\tau) = A \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\tau}{B}\right) \xrightarrow{T.F} G_x(f) = A \cdot B \cdot \Lambda(B \cdot f)$$

• Así:

$$P_{x_{cc}} = G_x(0) = A \cdot B \cdot \cancel{\Lambda(B \cdot f)} = \boxed{A \cdot B \text{ W}} \quad (\text{Potencia de continua del proceso})$$

• Finalmente tenemos que:

$$P_x = P_{x_{cc}} + P_{x_{ca}} \rightarrow P_{x_{ca}} = P_x - P_{x_{cc}} = A - (A \cdot B) = \boxed{A(1-B) \text{ W}}$$

b) Expresa $m_x(\tau)$ en función de la autocorrelación $R_x(\tau)$ del P.E $x(t)$

- Nos encontramos con un P.E estacionario y ergódico (al menos estacionario en sentido débil).

$$m_x(\tau) = E[(x(t+\tau) - x(t))^2]$$

$$= E[x^2(t+\tau) + x^2(t) - 2x(t+\tau) \cdot x(t)]$$

1) Nos encontramos con un P.E $x(t) \in \mathbb{R}$, luego verifica que $x^2(t) = |x(t)|^2$

2) Es un P.E estacionario en sentido débil y ergódico; lo que cumple:

1) Estacionariedad en la media: la media de todas las v.a.'s del proceso no es función del tiempo $E[x(t)] = \text{cte} = \mu_x$

✓ 2) Estacionariedad en la autocorrelación: en este caso, la autocorrelación no depende de los instantes t_1 y t_2 que pertenecen a $x(t_1)$ y $x(t_2)$ sino de la diferencia de tiempos $\tau = t_1 - t_2$

$$R_x(t_1, t_2) = E[x(t_1) \cdot x^*(t_2)] = E[x(t+\tau) \cdot x^*(t)] = R_x(\tau)$$

3) Ergodicidad en la media: para obtener la media de conjunto o ensamble basta con calcular la media del P.E temporal de una única realización

✓ 4) Ergódico en la autocorrelación: para obtener la autocorrelación de conjunto, basta con calcular la autocorrelación temporal de una única realización del P.E.

• Siguiendo con el desarrollo:

$$m_x(\tau) = E[x^2(t+\tau)] + E[x^2(t)] - 2E[x(t+\tau) \cdot x(t)]$$

• $E[x^2(t+\tau)] = E[x^2(t)] \equiv R_x \xrightarrow{\text{autocorrelación}}$ Al ser ergódico en la media, basta, basta una única función realización del P.E estacionario para obtener la autocorrelación de conjunto del P.E
 $= R_x(0)$

• $E[x(t+\tau) \cdot x(t)] = R_x(\tau) \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}$ lo que verifica que $x(t) = x^*(t)$

• Nos queda:

$$m_x(\tau) = 2(R_x(0) - R_x(\tau))$$

c) Suponga $M_x(f) = \mathcal{F}\{m_x(\tau)\}$

d) Expresa matemáticamente $M_x(f)$ en función del espectro de potencia $G_x(f)$ del proceso $x(t)$

$$\begin{aligned} G_x(f) &\stackrel{\text{v.l.k}}{=} \mathcal{F}\{R_x(\tau)\} \\ &= \mathcal{F}\left\{A \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\tau}{B}\right)\right\} \\ &= AB \Lambda(Bf) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x(f) &= \mathcal{F}\{m_x(\tau)\} \\ &= \mathcal{F}\{2(R_x(0) - R_x(\tau))\} \\ &= 2(G_x(0) - G_x(f)) \end{aligned}$$

Sustituyendo en $M_x(f)$, tenemos que: Fallo!! $R_x(0)$ es un valor que multiplica a $\delta(f)$

$$\begin{aligned} M_x(f) &= 2(AB \Lambda(B \cdot 0) - AB \Lambda(Bf)) \quad \cdot M_x(f) = \mathcal{F}\{m_x(\tau)\} \quad \text{esto es } x(t) \text{ de} \\ &= 2AB(1 - \Lambda(Bf)) \end{aligned}$$

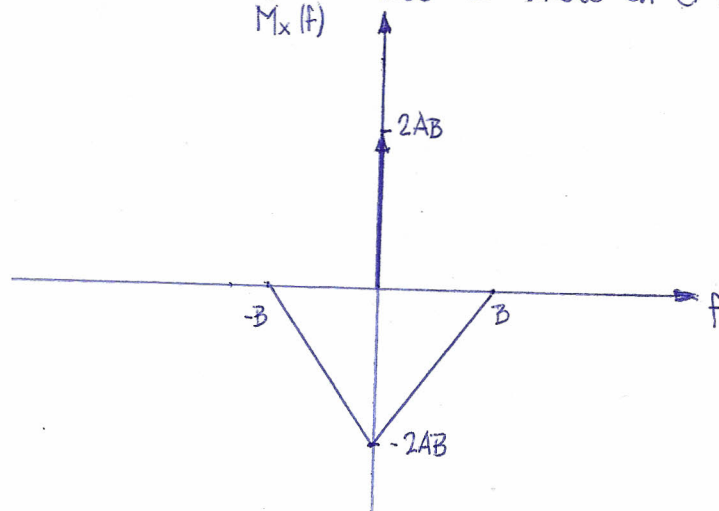
$$\begin{aligned} &= \mathcal{F}\{2R_x(0) \cdot 1 - R_x(\tau)\} \\ &= 2(R_x(0) \cdot \delta(f)) - R_x \\ &= 2\mathcal{F}\{R_x(0) \cdot 1 - R_x(\tau)\} \\ &= 2R_x(0) \cdot \delta(f) - 2G_x(f) \end{aligned}$$

• Así que sustituyendo en $M_x(f)$ tenemos que:

$$M_x(f) = 2(AB \Lambda(B \cdot 0)) \cdot \delta(f) - 2(AB \Lambda(Bf))$$

$$\boxed{M_x(f) = 2AB(\delta(f) - \Lambda(Bf))}$$

2) Represente gráficamente $M_x(f)$ indicando los valores en el eje de abscisas y ordenadas



"... Aparece una señal $x(t)$ sospechosa que se puede modelar como un P.E débilmente estacionario."
Al ingeniero le piden lo siguiente:

a) Demostrar que dicho P.E ~~cuya realización es~~ $x(t)$ cumple la siguiente ecuación:

$$E[(x(t+\tau) - x(t))^2] = 2[P_x - R_x(\tau)]$$

P_x : potencia media del proceso $R_x(\tau)$: función de autocorrelación

Razone y explíquelo detalladamente:

$$\begin{aligned} E[(x(t+\tau) - x(t))^2] &= E[x^2(t+\tau) + x^2(t) - 2x(t+\tau) \cdot x(t)] \quad \text{El op. "E[]" es un operador lineal.} \\ &= E[x^2(t+\tau)] + E[x^2(t)] - 2E[x(t+\tau) \cdot x(t)] \end{aligned}$$

• Nos encontramos con un P.E estacionario en sentido débil. Éste cumple:

1) Estacionariedad en la media: la media de ^{conjunto} las infinitas v.a's del P.E es constante y no depende del tiempo, por lo que todas las va's tienen la misma media. $E[x(t)] = \mu_x = \text{cte.}$

2) Estacionariedad en la autocorrelación: la autocorrelación de conjunto no depende de los instantes " t_1 " y " t_2 ", sino de $\tau = t_1 - t_2$
 $R_x(t_1, t_2) = E[x(t_1) \cdot x^*(t_2)] = E[x(t+\tau) \cdot x^*(t)] = R_x(\tau)$

$E[x^2(t)]$: Valor cuadrático medio. En la potencia media del proceso $x(t)$

$E[x^2(t+\tau)]$:

$$E[x^2(t)] = P_x \text{ si } x(t) \in \mathbb{R}$$

$$E[x^2(t)] = E[x^2(t+\tau)] \equiv P_x \equiv R_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x^*(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

- Dado que $x(t)$ es un P.E estacionario en sentido débil, una de las propiedades es que:

$$R_x(0) = E[x(t) \cdot x^*(t)] = E[|x(t)|^2] \geq 0 \quad x(t) \text{ es un P.E estacionaria en el valor cuadrático medio.}$$

• ~~Como la autocorrelación de conjunto depende de τ y no de " t_1 " ni de " t_2 " se entiende que el cálculo del~~ Además $R_x(\tau)$ sólo depende de $\tau \rightarrow R_x(0) = R_x(0+\tau) = E[x^2(t)] = E[x^2(t+\tau)]$

$$2E[x(t+\tau) \cdot x(t)] = 2R_x(\tau) \quad \text{Dado que } x(t) \text{ es estacionario en la autocorrelación.}$$

Finalmente tenemos que:

$$E[(x(t+\tau) - x(t))^2] = 2[R_x - R_x(\tau)]$$

b) Se sabe que $R_x(\tau) = A \cdot e^{-a|\tau|}$ con $A, a > 0$ y $A, a \in \mathbb{R}$. Se puede decir que $R_x(\tau)$ puede representar la función de autocorrelación del proceso $x(t)$?

• Antes de nada, veamos que $R_x(\tau)$ es una señal que está definida en potencia:

$$R_x \approx \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2$$

$$R_x(0) = A \cdot e^{-a|0|} = A \text{ W} \quad P_x < \infty, E_x \rightarrow \infty \quad R_x(\tau) \text{ está definida en potencia}$$

• Por otra parte se puede observar que es estacionaria en el valor cuadrático medio:

$$R_x(0) = E[|x(t)|^2] = A \geq 0$$

• La función de autocorrelación tiene simetría ^{por} hermitica, puesto que es una señal real y por, por lo que el P.E también debe serlo, $x(t)$:

$$R_x(\tau) = R_x^*(-\tau) \quad A \cdot e^{-a|\tau|} = A \cdot e^{-a|-\tau|} \quad \forall A$$

$$= A \cdot e^{-a|\tau|}$$

• Y efectivamente, el valor máximo de la función de autocorrelación se alcanza para $\tau = 0$

$$R_x(0) \geq |R_x(\tau)|$$

¶) Así que efectivamente $R_x(\tau) = A \cdot e^{-a|\tau|}$ podría ser la función de autocorrelación del P.E debilmente estacionario $x(t)$.

c) Dicha $R_x(\tau)$ atraviesa un sistema L.T.I cuya respuesta impulsiva es $h(t) = e^{-bt} \cdot u(t)$ con $b > 0$ y $b \in \mathbb{R}$. Calcular $G_y(f)$ utilizando $G_x(f)$.

$$G_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\} \xrightarrow{\text{Reverda}} e^{-bt} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2b}{b^2 + (2\pi f)^2} \quad e^{-bt} \cdot u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{b + j2\pi f}$$

$$= \mathcal{F}\{A \cdot e^{-a|\tau|}\} = A \cdot \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$$

$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$$

$$= \mathcal{F}\{e^{-bt} \cdot u(t)\} = \frac{1}{b + j2\pi f}$$

$$Y \quad R_h(\tau) = R\{h(t) * h^*(t - \tau)\} \xrightarrow{\mathcal{F}} G_h(f) = H(f) \cdot H^*(f) = |H(f)|^2$$

$$= \frac{1}{b + j2\pi f} \cdot \frac{1}{b - j2\pi f} = \frac{1}{b^2 + (2\pi f)^2}$$

Aí que tenemos que:

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * R_h(\tau) \quad \xrightarrow[\text{W.K.}]{\text{T.F.}} \quad G_Y(f) = G_X(f) \cdot G_h(f)$$

Por lo tanto:

$$G_Y(f) = \frac{2aA}{a^2 + (2\pi f)^2} \cdot \frac{1}{b^2 + (2\pi f)^2} = \frac{2aA}{a^2b^2 + (2\pi f)^2(a^2 + b^2) + (2\pi f)^4}$$

$$\boxed{G_Y(f) = \frac{2aA}{a^2 + b^2(1 + (2\pi f)^2) + (2\pi f)^4}}$$

d) Calcular la función de autocorrelación $R_Y(\tau)$ a la salida del sistema

$$R_Y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{G_Y(f)\}$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{2aA}{a^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{b^2 + \omega^2} \right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G_Y(f) \cdot e^{j\omega\tau} df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2aA}{a^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{b^2 + \omega^2} \right) e^{j\omega\tau} df$$

Por la descomposición que nos proporcionan tenemos que:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{aA}{(a^2 - b^2)b} \cdot \frac{2b}{\omega^2 + b^2} - \frac{A}{a^2 - b^2} \cdot \frac{2a}{\omega^2 + a^2} \right) \cdot e^{j\omega\tau} df$$

$$= \frac{Aa}{(a^2 - b^2)b} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2b}{\omega^2 + b^2} \cdot e^{j\omega\tau} df - \frac{A}{a^2 - b^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a}{\omega^2 + a^2} \cdot e^{j\omega\tau} df$$

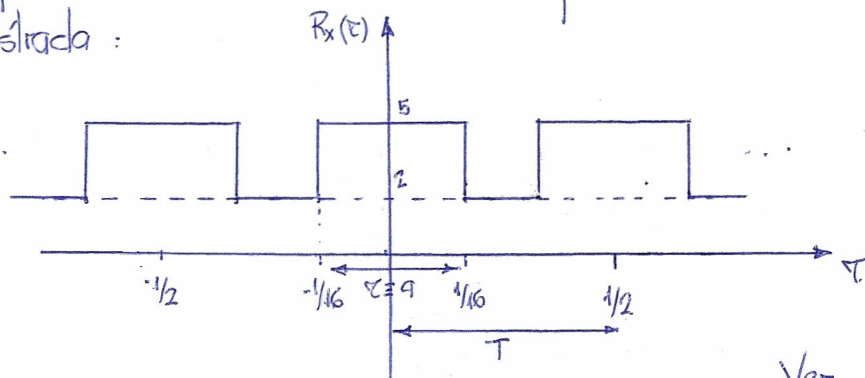
Se parece a la integral de tipo arctan $\rightarrow \int \frac{1}{a^2 + b^2 x^2} dx = \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{bx}{a}\right)$, pero no es la T.F.⁻¹, por lo que hay que buscar cuál se parece $X(f)$ a $G_Y(f)$ para obtener $x(t)$

$$= \frac{Aa}{(a^2 - b^2)b} \cdot e^{-b|\tau|} - \frac{A}{a^2 - b^2} \cdot e^{-a|\tau|} \quad X(f) = \frac{2b}{b^2 + \omega^2} \xrightarrow{\text{T.F.}^{-1}} x(t) = e^{-b|t|}$$

$$\boxed{R_Y(\tau) = \frac{A}{(a^2 - b^2)} \left(\frac{a}{b} e^{-b|\tau|} - e^{-a|\tau|} \right)}$$

Problema 3 Febrero de 2013 (Temas 2 y 3)

Una empresa necesita saber si un P.E puede tener como función de autocorrelación la señal mostrada:



Ver hoja siguiente !!!!

a) Calcular el espectro de $G_x(f)$ en su forma más simplificada posible.

i) Caracterizamos la función de autocorrelación, $R_x(\tau)$:

$$R_x(\tau) = 2 + \sum_n 3 \text{rect}\left(\frac{\tau - n/2}{32}\right)$$

Recordar: Ten de pulsos $\sum_n \text{rect}\left(\frac{t - nT}{T}\right)$

Pulso $\text{rect}\left(\frac{t}{a}\right)$

↳ tiempo de estabilidad del pulso

2) Calculamos $G_x(f)$ mediante el teorema de Wiener-Khinchin:

~~$$G_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}$$~~

$$G_x(f) = \mathcal{F}\left\{2 + \sum_n \text{rect}\left(\frac{\tau - n/2}{32}\right)\right\} = \mathcal{F}\{2\} + \mathcal{F}\left\{\sum_n \text{rect}\left(\frac{\tau - n/2}{32}\right)\right\}$$

$$= 2\delta(f) + \mathcal{F}\left\{\sum_n \text{rect}\left(\frac{\tau - n/2}{32}\right)\right\}$$

Para facilitar la realización de la T.F, descomponemos:

$$\sum_n \text{rect}\left(\frac{\tau - n/2}{32}\right) = \text{rect}\left(\frac{\tau}{32}\right) * \sum_n \delta(t - n/2) = 32 \text{sinc}(32f) \cdot \sum_{m} \delta(f - \frac{m}{1/2})$$

$$= 32 \text{sinc}(32f) \cdot 2 \sum_m \delta(f - 2m)$$

Así:

$$G_x(f) = 2(\delta(f) + 32 \text{sinc}(32f) \cdot \sum_m \delta(f - 2m))$$

$$\boxed{G_x(f) = 2(\delta(f) + \frac{1}{32} \sum_m \text{sinc}\left(\frac{64m}{16}\right) \cdot \delta(f - 2m))}$$

La T.F de $R_x(\tau)$ está mal

Recordar:

Verificar 1) $\sum_n \delta(t - nT) \xrightarrow{\text{T.F.}} \sum_m \delta(f - \frac{m}{T})$

2) Cambio de variable en

$$Y(f) = X(f) \cdot \sum_m \delta(f - \frac{m}{T}) \rightarrow f = m/T$$

$$Y(f) = \frac{1}{T} \sum_m X\left(\frac{m}{T}\right) \cdot \delta(f - \frac{m}{T})$$

a) Calcular el espectro de $G_x(f)$ en su forma más simplificada posible

1) Caracterizamos la función de autocorrelación, $R_x(\tau)$:

$$R_x(\tau) = 2 + \sum_n 3 \text{rect}\left(32\left(\tau - n/2\right)\right)$$

2) Calculamos la T.F de $R_x(\tau)$, $G_x(f)$:

$$G_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}$$

$$G_x(f) = \mathcal{F}\left\{2 + \sum_n 3 \text{rect}\left(32\left(\tau - n/2\right)\right)\right\}$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{F}\{2\} + \mathcal{F}\left\{\sum_n 3 \text{rect}\left(32\left(\tau - n/2\right)\right)\right\} = \mathcal{F}\{2\} + \mathcal{F}\left\{\sum_n 3 \text{rect}\left(32\left(\tau - n/2\right)\right)\right\} \\ &= 2\delta(f) + \mathcal{F}\left\{\sum_n 3 \text{rect}\left(32\left(\tau - n/2\right)\right)\right\}^{(2)} \end{aligned}$$

Para facilitar su resolución descomponemos la T.F (2):

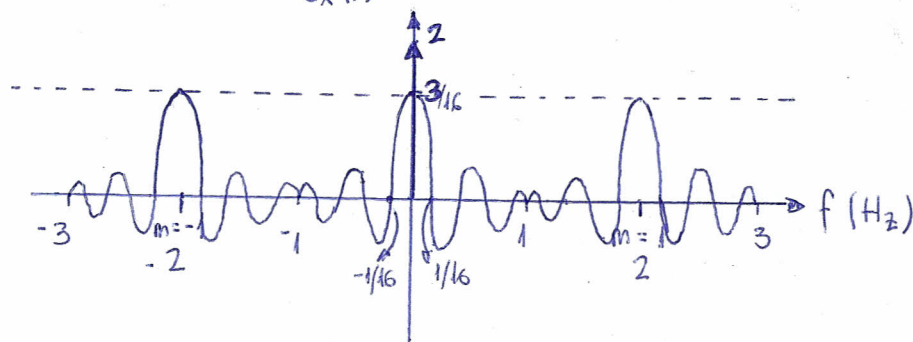
$$\sum_n \text{rect}\left(32\left(\tau - n/2\right)\right) = 3 \text{rect}\left(32\tau\right) * \sum_n \delta\left(\tau - \frac{n}{2}\right) \xrightarrow{\text{T.F}} \frac{3}{32} \text{sinc}\left(\frac{f}{32}\right) \cdot 2 \sum_m \delta(f - 2m)$$

Así que nos queda que:

$$G_x(f) = 2\delta(f) + 2 \cdot \left[\frac{3}{32} \text{sinc}\left(\frac{f}{32}\right) \cdot \sum_m \delta(f - 2m) \right]$$

$$G_x(f) = 2\delta(f) + \frac{3}{16} \text{sinc}\left(\frac{m}{16}\right) \sum_m \text{sinc}\left(\frac{m}{16}\right) \cdot \delta(f - 2m)$$

b) Representar $G_x(f)$ indicando unidades significativas para el eje de abscisas y el eje de ordenadas



Importante !! : tanto la escala en el eje de abscisas como en el eje de ordenadas está mal dimensionada, es decir el intervalo que representa $1/16$ no se corresponde al intervalo que representa 1 para el eje de abscisas. De igual forma sucede con el eje de ordenadas.

c) ¿Puede la figura representar la función de autocorrelación de un P.E.?

~~Sí de hecho $R_x(\tau)$ representa la función de autocorrelación de un P.E. ^{ciclo} ~~cicloestacionario~~ para $T_0 = \frac{1}{2}$ s. Un P.E. ~~cicloestacionario~~ en sentido débil o laxo verifica que:~~

~~Estacionariedad en la media: la media de conjunto o de ensamble es la misma para todas las v.a.'s que componen el P.E. Es decir la media de conjunto no depende del tiempo~~

$$E[x(t)] = \mu_x = \text{cte} \rightarrow G_x(0) = 2\delta(0) + \frac{3}{16}$$

~~Sí, de hecho $R_x(\tau)$ representa la función de autocorrelación de un P.E. ~~cicloestacionario~~ para $T_0 = \frac{1}{2}$ s, $f_0 = 2$ Hz. Un P.E. ~~cicloestacionario~~ es aquel cuyos esta~~

A ver, no es la función de autocorrelación de un P.E. cicloestacionario porque no es cicloestacionario en la media (sí en la autocorrelación).

$R_x(\tau)$ pertenece a un P.E. estacionario en sentido débil, lo que verifica que:

$$E[x(t)] = \mu_x = \text{cte} \rightarrow G_x(0) = 2\delta(0) + \frac{3}{16} \sum_{m=0}^1 \sin\left(\frac{m}{16}\right) \cdot \delta(0 - 2m)$$

$$P_{cc} = 2 + \frac{3}{16} \text{ W/Hz} \quad P_{cc} = 2 \text{ W} + \frac{3}{16}$$

es constante, luego lo cumple.

$$E[x(t_1, t_2)] = E[x(t_1) \cdot x^*(t_2)] = E[x(t+\tau) \cdot x^*(t)] = R_x(\tau)$$

"El" La función de autocorrelación sólo depende de la diferencia de tiempos $\tau = t_1 - t_2$

• $E[|x^2(t)|] \geq 0 \rightarrow$ Además es estacionario en el valor cuadrático medio

$$R_x(0) = 2 + 3 \sum_{m=1}^1 \left[\frac{1}{16} \right] = 5 \text{ W}$$

• Podemos decir que $x(t)$ es un P.E. real dado que $R_x(\tau)$ es par $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$

d) Calcule las frecuencias (Hz) de los 3 primeros nulos de $G_x(f)$ a partir de 0 Hz.

$$W_{p_n} = \frac{1}{T} = \frac{1}{1/16} = 16 \text{ Hz} \quad W_{2n} = 32 \text{ Hz} \quad W_{3n} = 48 \text{ Hz}$$